

Limites latérales

Déf Soit f une fonction

La limite à droite de f en x_0
vaut L si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ on a

On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

La limite à gauche de f en x_0
vaut L si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

Thm

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \end{cases}$$

Exemple

• Reprenons l'exemple précédent:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2|x|} ; x_0 = 0$$
$$= \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas!
 $(\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2})$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} ; x_0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad (\text{car } 2 = 2)$$

$$\bullet f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 3x^2}} ; x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{x}{|x| \sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x \sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt{x^2 + 3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{x}{x \sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \neq -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Limites ponctuelles vers l'infini

Def Soit $f(x)$ une fonction

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

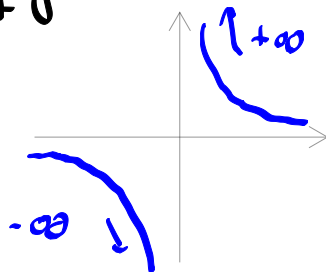
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ si } \forall B < 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < B$$

On peut aussi considérer des limites latérales infinies.

Exemple $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas



- $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $x_0 = 1$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

Soit $A > 0$.

$$f(x) > A ; \frac{1}{(x-1)^2} > A \rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{A}$$

car A et $(x-1)^2 > 0$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (\text{car } \sqrt{x} \text{ est croissante})$$

$\Rightarrow$ Prendre $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ fonctionne :

$$|x - 1| < \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow f(x) > A.$$

- $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 3x - 10}$; $x_0 = -2$

Pour la limite au a

$\frac{-1}{0}$ quel signe?

On met en évidence le facteur qui tend vers 0 :

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 1}{(x-5)} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow -2^- & \downarrow & x \rightarrow -2^- \\ -1/-7 & = & 1/7 \\ & & -\infty \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{9 - 2x \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}{(x-2)^2}; x=2$$

$$f(x) = \underbrace{\left(9 - 2x \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)\right)}_{\substack{< 5 \\ > 4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 2 \\ +\infty}}$$

pour x proche de 2.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

(positif et pas proche de 0) $\cdot +\infty$

Infinitement petits équivalents (IPE)

Def Soient f et g des fonctions

On dit que f et g sont IPE en x_0 si :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (petits)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (équivalent)
↳ ils approchent 0 à la même vitesse.

On écrit $f \sim g$ (en x_0)

Dans une limite $x \rightarrow x_0$, on peut remplacer un facteur $f(x)$ par $g(x)$ si $f \sim g$ en x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \cdot h(x)$$

facteur ↗

$$= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot h(x)$$

1 car $f \sim g$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot h(x)$$

Prop

- $\sin(x) \sim x$ en $x_0 = 0$
- $\tan(x) \sim x$ en $x_0 = 0$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ en $x_0 = 0$

Exemples

$$o \quad f(x) = \frac{\sin^2(x)}{4 - 4 \cos(x)} \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{4(1 - \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

On peut aussi faire des changements de variables pour trouver de IPE:

Exemple $f(x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos(x)}$; $x_0 = -\frac{\pi}{2}$

On change la variable pour avoir une limite vers 0

$$y = x + \frac{\pi}{2} ; \quad x = y - \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\cos(y - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(y)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1$$

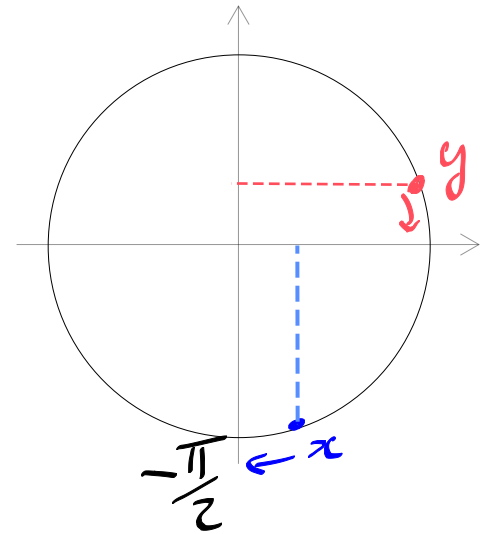
⚠ Attention!

Pour remplacer $f(x)$ par un IPE, il faut que $f(x)$ soit un facteur!

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}$

$$\neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

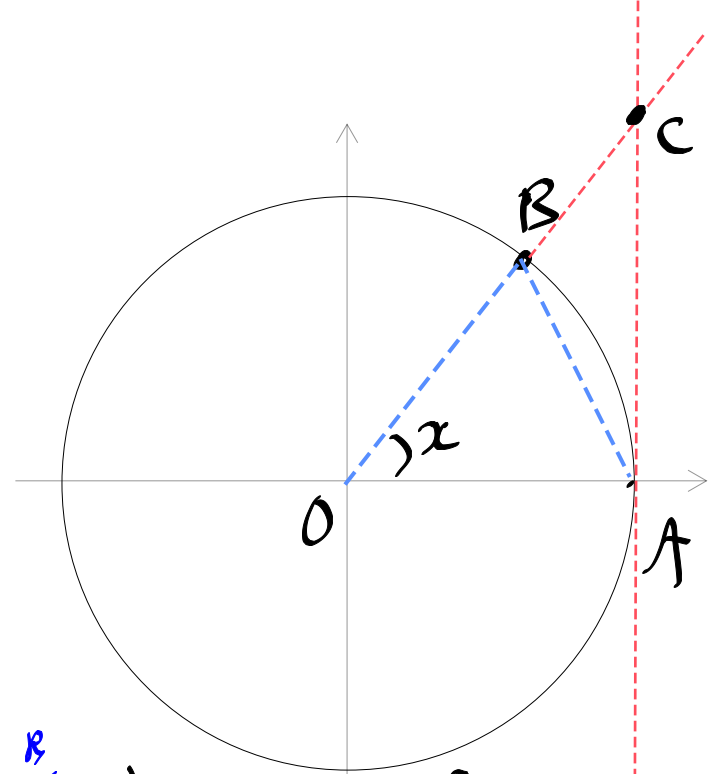
X faut!



$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x) (1 - \cos(x))}{x^3} \\
 &= \frac{-x^3}{x^3} = -1
 \end{aligned}$$

Rem Il y a d'autres LPE, comme $e^x - 1 \sim x$

Démonstration que $\sin(x) \sim x$ en $x_0 = 0$



$$\text{Aire}(\triangle OAB) \leq \text{Aire}(\triangle OAC) \leq \text{Aire}(\triangle OBC)$$

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$$

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

$$\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\hookrightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$\downarrow$
 1

$\downarrow x \rightarrow 0$
 1

Thm des gendarmes $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$